3段3次、4段4次ルンゲ・クッタ公式の解系について(常微分方程式系の数値解析とその周辺)

中島, 正治; 黒木, 政喜

数理解析研究所講究録
841巻 1993年 116-133

3段3次，4段4次ルンゲ・クッタ公式の解系について

鹿大理学部　中島　正治 (Masaharu Nakashima)
鹿大理学部　黒木　政喜 (Masaki Kuroki)

$$k_i = hf(x_n + c_i h,\ y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m} b_i k_i$$

$$= y_n + \sum_{i=1}^{m} b_i\, hf(x_n + c_i h,\ y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

においてorder 3の打ち切り誤差は、

$$T(y(x_i),\ y(x_{i+1}),\cdots y(x_{i+N}),\ k_i,\cdots,k_{i+N})$$

$$= y(x_{i+N}) - \{a_0 y(x_0) + \cdots + a_N y(x_{i+N-1}) + \phi(x_i,\cdots,x_{i+N},\ y_i,\cdots,y_{i+N},k_i,\cdots,k_{i+N})\}$$

と表される。ここでLotkinのフリーパラメータ決定法は

$$|f(x,y)| < M$$

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} < \frac{L^{i+j}}{M^{j-1}} \quad (i+j \leqq m) \qquad 但し\ M,L : \text{constant}$$

と仮定したのち行なわれる。私達は order 3においては、order 3までの決定方程式内の条件をみたすフリーパラメータがorder 4の決定方程式内のいくつかの条件式を満足するように、又order 4においては、order 5の決定方程式内のいくつかを満足していくように解系を調べました。

Order 3

$$A: \begin{cases} \text{order 1}: & b_1+b_2+b_3 = 1 \\ \text{order 2}: & b_2c_2+b_3c_3 = \frac{1}{2} \\ \text{order 3}: & b_2c_2^2+b_3c_3^2 = \frac{1}{3} \\ & b_3c_2a_{32} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{order 4}: \quad b_2c_2^3+b_3c_3^3 = \frac{1}{4} \quad \text{—— ①}$$

$$b_3c_2^2a_{32} = \frac{1}{12} \quad \text{—— ②}$$

$$b_3c_2c_3a_{32} = \frac{1}{8} \quad \text{—— ③}$$

フリーパラメータの決定にLotkinの誤差評価を利用する

$$D_1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{36}\{2(c_2+c_3) - 3c_2c_3\}$$

$$D_2 = \frac{1}{24} - \frac{c_2}{12}$$

$$D_3 = \frac{1}{8} - \frac{c_3}{6}$$

$$D_4 = \frac{1}{24}$$

$|E| < [8|D_1|+|D_2|+|2D_2+D_3|+|D_2+D_3|+2|D_3|+2|D_4|]ML^3$, 但し $[\,,\,] = C$

Case 1 (A+①+②):

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	-1	2	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

で決定される。

Case 2 (A+①+③) :

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \frac{1}{2} \\ c_2^2 & c_3^2 & \frac{1}{3} \\ c_2^3 & c_3^3 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{c_2c_3(c_3-c_2)}{12}\left\{3+6c_2c_3-4(c_2+c_3)\right\} = 0$$

$$\therefore\ 3+6c_2c_3-4(c_2+c_3)=0 \qquad \text{——(I)}$$

$$\begin{cases} b_3c_2a_{32}=\frac{1}{6} \\ b_3c_2c_3a_{32}=\frac{1}{8} \end{cases} \quad \text{より} \quad c_3=\frac{3}{4} \qquad \text{——(II)}$$

(I),(II)から $c_2=0$ よって解は存在しない。

Case 3 (A+②+③) :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \\ \hline & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{array}$$

で決定される。

	A+①+②	A+①+③	A+②+③
C	$\frac{17}{36}$	x	$\frac{1}{9}$

$(|E|<CML^3)$

Order 4

A : $\begin{cases} \text{order 1} : b_1+b_2+b_3+b_4=1 \\ \text{order 2} : b_2c_2+b_3c_3+b_4c_4=\frac{1}{2} \end{cases}$

$$
\begin{cases}
\text{order } 3 : & b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 = \frac{1}{3} \\
 & b_3c_2a_{32} + b_4(c_2a_{42} + c_3a_{43}) = \frac{1}{6} \\
\text{order } 4 : & b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 = \frac{1}{4} \\
 & b_3c_2c_3a_{32} + b_4(c_2a_{42} + c_3a_{43})c_4 = \frac{1}{8} \\
 & b_3c_2^2a_{32} + b_4(c_2^2a_{42} + c_3^2a_{43}) = \frac{1}{12} \\
 & b_4c_2a_{32}a_{43} = \frac{1}{24}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{order } 5 : \quad & b_2c_2^4 + b_3c_3^4 + b_4c_4^4 = \frac{1}{5} && \text{——} ① \\
& b_3c_2^3a_{32} + b_4(c_2^3a_{42} + c_3^3a_{43}) = \frac{1}{20} && \text{——} ② \\
& b_3c_2^2c_3a_{32} + b_4(c_2^2a_{42} + c_3^2a_{43})c_4 = \frac{1}{15} && \text{——} ③ \\
& b_4c_2^2a_{32}a_{43} = \frac{1}{60} && \text{——} ④ \\
& b_3c_2c_3^2a_{32} + b_4(c_2a_{42} + c_3a_{43})c_4^2 = \frac{1}{10} && \text{——} ⑤ \\
& b_4c_2(c_3 + c_4)a_{32}a_{43} = \frac{7}{120} && \text{——} ⑥ \\
& b_3c_2^2a_{32}^2 + b_4(c_2a_{42} + c_3a_{43})^2 = \frac{1}{20} && \text{——} ⑦
\end{aligned}
$$

order 3と同様にフリーパラメータの決定にLotkinの誤差評価を利用する。

$$
\begin{aligned}
|E| < \big[& 16|D_1| + 4|D_2| + |D_2 + 3D_3| + |2D_2 + 3D_3| + |D_2 + D_3| + |D_3| + 8|D_4| + |D_5| \\
& + |2D_5 + D_7| + |D_5 + D_6 + D_7| + |D_6| + |2D_6 + D_7| + |D_7| + 2|D_8| \big] ML^4
\end{aligned}
$$

組1

$D_1 = \frac{1}{24} \times$ ① の(右辺－左辺)　　$D_5 = \frac{1}{2} \times$ ④ の(右辺－左辺)

$D_2 = \frac{1}{2} \times$ ⑤ の(右辺－左辺)　　$D_6 = \frac{1}{2} \times$ ⑦ の(右辺－左辺)

$D_3 = \frac{1}{6} \times$ ② の(右辺－左辺)　　$D_7 =$ ⑥ の(右辺－左辺)

$D_4 = \frac{1}{2} \times$ ③ の(右辺－左辺)　　$D_8 = \frac{1}{120}$

order 4 の解系は、Butcherの本などにも紹介されているように5通りに分かれている。よってそれぞれの場合についてorder 3の時と同様に調べていきました。

Case 1 : $(c_2 \neq c_3 \neq c_4,\ c_4 = 1,\ c_2 \neq \frac{1}{2},\ 3-4(c_2+c_3)+6c_2c_3 \neq 0)$ c_2, c_3 : freeparamater

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}
$$

組 1

$$
b_1 = \frac{1-2(c_2+c_3)+6c_2c_3}{12c_2c_3},\quad b_2 = \frac{2c_3-1}{12c_2(c_3-c_2)(1-c_2)},\quad b_3 = \frac{1-2c_2}{12c_3(c_3-c_2)(1-c_3)}
$$

$$
b_4 = \frac{3-4(c_2+c_3)+6c_2c_3}{12(1-c_2)(1-c_3)},\quad a_{31} = \frac{c_3(3c_2-c_3-4c_2^2)}{2c_2(1-2c_2)},\quad a_{32} = \frac{c_3(c_3-c_2)}{2c_2(1-2c_2)}
$$

$$
a_{41} = \frac{4c_3^2(3c_2^2-3c_2+1)-c_3(12c_2^2-15c_2+5)+2(2c_2^2-3c_2+1)}{2c_2c_3\{3-4(c_2+c_3)+6c_2c_3\}}
$$

$$
a_{42} = \frac{(-4c_3^2+5c_3+c_2-2)(1-c_2)}{2c_2(c_3-c_2)\{3-4(c_2+c_3)+6c_2c_3\}},\quad a_{43} = \frac{(1-2c_2)(1-c_3)(1-c_2)}{c_3(c_3-c_2)\{3-4(c_2+c_3)+6c_2c_3\}}
$$

(1) A+①+②

行列式を作成して解を持つための条件，行列式＝0を考えていく。

A+①より.

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ c_2^2 & c_3^2 & 1 & -\frac{1}{3} \\ c_2^3 & c_3^3 & 1 & -\frac{1}{4} \\ c_2^4 & c_3^4 & 1 & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{c_2c_3}{60}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1-c_2 & 1-c_3 & 0 & 10 \\ 1-c_2^2 & 1-c_3^2 & 0 & 15 \\ 1-c_2^3 & 1-c_3^3 & 0 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{c_2c_3}{60}(1-c_2)(1-c_3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1+c_2 & c_2-c_3 & \frac{3}{2} \\ 1+c_2+c_2^2 & (c_2-c_3)(1+c_2+c_3) & \frac{9}{5} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{c_2c_3}{60}(1-c_2)(1-c_3)(c_2-c_3)\begin{vmatrix} 1 & c_2-\frac{1}{2} \\ 1+c_2+c_3 & c_2^2+c_2-\frac{4}{5} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{c_2c_3}{60}(1-c_2)(1-c_3)(c_2-c_3)\left\{\frac{5c_2-3}{10}-\frac{2c_2-1}{2}c_3\right\} = 0$$

条件より $\quad c_3 = \dfrac{5c_2-3}{5(2c_2-1)}$

人+②より

$$\begin{vmatrix} c_2a_{32} & c_2a_{42}+c_3a_{43} & -\frac{1}{6} \\ c_2^2a_{32} & c_2^2a_{42}+c_3^2a_{43} & -\frac{1}{12} \\ c_2^3a_{32} & c_2^3a_{42}+c_3^3a_{43} & -\frac{1}{20} \end{vmatrix} = c_2a_{32}\begin{vmatrix} 1 & c_2a_{42}+c_3a_{43} & -\frac{1}{6} \\ 0 & c_3a_{43}(c_2-c_3) & \frac{1}{12}-\frac{1}{6}c_2 \\ 0 & c_3a_{43}(c_2^2-c_3^2) & \frac{1}{20}-\frac{1}{6}c_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= c_2c_3(c_2-c_3)a_{32}a_{43}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{12}-\frac{1}{6}c_2 \\ c_2+c_3 & \frac{1}{20}-\frac{1}{6}c_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= c_2c_3(c_2-c_3)a_{32}a_{43}\left\{\left(\frac{1}{6}c_2-\frac{1}{12}\right)c_3-\left(\frac{1}{12}c_2-\frac{1}{20}\right)\right\} = 0$$

条件より $\quad c_3 = \dfrac{5c_2-3}{5(2c_2-1)}$

よって①と②は同値式となり $c_3=\dfrac{5c_2-3}{5(2c_2-1)}$ で決定される。

(2) A+①+③

A+①より　$c_3=\dfrac{5c_2-3}{5(2c_2-1)}$

A+③より

$$\begin{vmatrix} c_2c_3a_{32} & c_2a_{42}+c_3a_{43} & -\frac{1}{8} \\ 0 & c_2a_{32}a_{43} & -\frac{1}{24} \\ c_2^2c_3a_{32} & c_2^2a_{42}+c_3^2a_{43} & -\frac{1}{15} \end{vmatrix} = -\frac{c_2c_3a_{32}}{120}\begin{vmatrix} 1 & c_2a_{42}+c_3a_{43} & 15 \\ 0 & c_2a_{32}a_{43} & 5 \\ 0 & c_3a_{43}(c_2-c_3) & 15c_2-8 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{c_2c_3a_{32}a_{43}}{120}\begin{vmatrix} c_2a_{32} & 5 \\ c_3(c_2-c_3) & 15c_2-8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{c_2c_3^2a_{32}a_{43}(5c_2-2)(-10c_2^2+10c_2-3)}{1200(2c_2-1)} = 0$$

条件より　$c_2=\dfrac{2}{5}$，$c_3=1$

$c_3=1$ は Case 1 の条件に反するので解は存在しない。

以下同様の方法で進めていく。

(3) A+①+④

A+④より　$c_2=\dfrac{2}{5}$　∴ $c_3=1$　　解は存在しない．

又ここで③と④が同値式であることが分かる。

(4) A+①+⑤

A+⑤より　$c_3=\dfrac{3}{5}$；　∴ $c_2=0$　　解は存在しない．

(5) A+①+⑥

A+⑥ より $C_3=\frac{2}{5}$ $\therefore C_2=1$　　解は存在しない。

(16) A+①+⑦

A+⑦ より

$$10(2-3C_2)C_3^3+(14C_2^2+72C_2-47)C_3^2+(-20C_2^2-57C_2+36)C_3+(6C_2^2+15C_2-9)=0$$

よってこれを満足する C_2, C_3 が存在すれば解が存在する。

(17) A+③+④

A+③ より $C_2=\frac{2}{5}$

A+④ より $C_2=\frac{2}{5}$　　よって $C_2=\frac{2}{5}$ で解が存在する。

(18) A+③+⑤

A+③ より $C_2=\frac{2}{5}$

A+⑤ より $C_3=\frac{3}{5}$

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & & & \\
\frac{3}{5} & -\frac{3}{20} & \frac{3}{4} & & \\
1 & \frac{19}{44} & -\frac{15}{44} & \frac{10}{11} & \\
\hline
 & \frac{11}{72} & \frac{25}{72} & \frac{25}{72} & \frac{11}{72}
\end{array}$$

で解が存在する。

(9) A+③+⑥

A+③ より　$C_2=\frac{2}{5}$

A+⑥ より　$C_3=\frac{2}{5}$　　よって解は存在しない。

(10) A+③+⑦

A+③ より　$C_2=\frac{2}{5}$

A+⑦ より　$200C_3^3-399C_3^2+250C_3-51=0$

を満足する C_3 が存在すれば　解は存在する。

(11) A+⑤+⑥

A+⑤ より　$C_3=\frac{3}{5}$

A+⑥ より　$C_3=\frac{2}{5}$　　よって解は存在しない。

(12) A+⑤+⑦

A+⑤ より　$C_3=\frac{3}{5}$

A+⑦ より　$C_2=\frac{1}{4}$

0				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{3}{5}$	$-\frac{6}{25}$	$\frac{21}{25}$		
1	$\frac{6}{5}$	$-\frac{57}{35}$	$\frac{10}{7}$	
	$\frac{1}{9}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{125}{252}$	$\frac{5}{36}$

で解が存在する。

(13) A+⑥+⑦

A+⑥ より　　$c_3 = \frac{2}{5}$

A+⑦ より　　$c_2 = \frac{-15 \pm \sqrt{281}}{4}$　　で解が存在する。

以上 Case 1 を下の表にまとめる。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
①							
②							
③	X	X					
④	X	X					
⑤	X	X	7.46×10^{-2}	X			
⑥	X	X	X	X	X		
⑦				X	7.70×10^{-2}		

Case 2 : ($c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$, $b_3 \neq 0$)　　b_3: freeparamater

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{3b_3-1}{6b_3} & \frac{1}{6b_3} & & \\
1 & 0 & 1-3b_3 & 3b_3 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}-b_3 & b_3 & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

(1) A+① 解系の値を代入すると b_3 に関して不定となる。

(2) A+②

$$
\underset{B}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2}(a_{42}+a_{43}) \\ \frac{1}{4}a_{32} & \frac{1}{4}(a_{42}+a_{43}) \\ \frac{1}{8}a_{32} & \frac{1}{8}(a_{42}+a_{43}) \end{pmatrix}}
\begin{pmatrix} b_3 \\ \\ b_4 \end{pmatrix}
=
\underset{C}{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}}
$$

$\mathrm{rank}\,B = 1$, $\mathrm{rank}\,(B, C) = 2$

$\mathrm{rank}\,B \neq \mathrm{rank}\,(B, C)$ より解は存在しない。

(3) A+③, A+④, A+⑤, A+⑥ も同様にして解は存在しない。

(4) A+⑦

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2}(a_{42}+a_{43}) \\ 0 & \frac{1}{2}a_{32}a_{43} \\ \frac{1}{3}a_{32}^2 & \frac{1}{4}(a_{42}+a_{43})^2 \end{pmatrix}}_{B}
\begin{pmatrix} b_3 \\ \\ b_4 \end{pmatrix}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{24} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}}_{C}
$$

$\mathrm{rank}\, B = 2$,

$$
\mathrm{rank}(B, C) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{120}(1-5a_{32}) \end{pmatrix}
$$

(i) $a_{32} \neq \frac{1}{5}$ で $\mathrm{rank}(B, C) = 3$, $\mathrm{rank}\, B \neq \mathrm{rank}(B, C)$ より解は存在しない。

(ii) $a_{32} = \frac{1}{5}$ で $\mathrm{rank}(B, C) = 2$. $\mathrm{rank}\, B = \mathrm{rank}(B, C)$ より解は存在し

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & & \\
1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

で決定される。

Case 3 : $(c_2 = \frac{1}{2}, \ c_3 = 0, \ b_3 \neq 0)$ b_3 : free paramater

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
0 & -\frac{1}{12b_3} & \frac{1}{12b_3} & & \\
1 & -\frac{1}{2}-6b_3 & \frac{3}{2} & 6b_3 & \\
\hline
 & \frac{1}{6}-b_3 & \frac{2}{3} & b_3 & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

(1) A+① b_3に関しては不定

(2) A+②, ---, A+⑥はCase 2と同様にして解は存在しない。

(3) A+⑦

$$
\underset{B}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2}a_{42} \\ 0 & \frac{1}{2}a_{42} \\ \frac{1}{4}a_{32}^2 & \frac{1}{4}a_{42}^2 \end{pmatrix}}
\begin{pmatrix} b_3 \\ \\ b_4 \end{pmatrix}
=
\underset{C}{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}}
$$

$$\mathrm{rank}\, B = 2$$

$$
\mathrm{rank}(B, C) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{160}-\frac{1}{48}a_{32} \end{pmatrix}
$$

(i) $a_{32} \neq -\frac{21}{10}$で$\mathrm{rank}(B, C) = 3$, $\mathrm{rank}\, B \neq \mathrm{rank}(B, C)$で解は存在しない。

iii) $a_{32} = -\frac{21}{10}$ で $\mathrm{rank}(B, C) = 2$; $\mathrm{rank}\, B = \mathrm{rank}(B, C)$ で解は存在し

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
0 & \frac{21}{10} & -\frac{21}{10} & & \\
1 & -\frac{11}{42} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{21} & \\
\hline
 & \frac{13}{63} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{126} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

で決定される。

Case 4 : ($c_2 = 1$, $c_3 = \frac{1}{2}$, $b_4 \neq 0$)　b_4 : freeparamater

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & & \\
1 & 1 - \frac{1}{4b_4} & -\frac{1}{12b_4} & \frac{1}{3b_4} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - b_4 & \frac{2}{3} & b_4
\end{array}
$$

(1) A+①　　b_4 に関して不定

(2) A+②, ---, A+⑥ は Case 2 と同様にして解は存在しない。

(3) A+⑦,

$$
\begin{pmatrix} a_{32} & a_{42}+\frac{1}{2}a_{43} \\ \frac{1}{2}a_{32} & a_{42}+\frac{1}{2}a_{43} \\ a_{32}^2 & (a_{42}+\frac{1}{2}a_{43})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3 \\ \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}
$$

$$\qquad B \qquad\qquad\qquad\qquad C$$

$$\mathrm{rank}\, B = 2$$

$$
\mathrm{rank}(B, C) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1440 b_4}(57b_4 - 10) \end{pmatrix}
$$

(i) $b_4 \neq \frac{10}{57}$ で $\mathrm{rank}(B, C) = 3$, $\mathrm{rank}\, B \neq \mathrm{rank}(B, C)$ で解は存在しない。

(ii) $b_4 = \frac{10}{57}$ で $\mathrm{rank}(B, C) = 2$, $\mathrm{rank}\, B = \mathrm{rank}(B, C)$ で解は存在して

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & & \\
1 & -\frac{17}{46} & -\frac{19}{40} & \frac{19}{76} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{114} & \frac{2}{3} & \frac{10}{57}
\end{array}
$$

で決定される。

Case 5 : $(c_2 \neq 0,\ c_3 = \frac{1}{2},\ b_2 = 0)$ c_2 : free paramater

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & c_2 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{4c_2-1}{8c_2} & \frac{1}{8c_2} & & \\
1 & \frac{1-2c_2}{2c_2} & -\frac{1}{2c_2} & 2 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

(1) A+① c_2 に関しては不定

(2) A+②, A+⑤, ---, A+⑦ は Case 2 と同様にして解は存在しない。

(3) A+③, A+④

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} c_2 a_{32} & c_2 a_{42} + \frac{1}{2} a_{43} \\ \frac{1}{2} c_2 a_{32} & c_2 a_{42} + \frac{1}{2} a_{43} \\ \frac{1}{2} c_2^2 a_{32} & c_2^2 a_{42} + \frac{1}{4} a_{43} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} b_3 \\ \\ b_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{15} \end{pmatrix}}_{C}
$$

$$\operatorname{rank} B = 2$$

$$
\operatorname{rank}(B, C) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{} \\ 0 & 1 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{120}(5c_2-2) \end{pmatrix}
$$

(i) $c_2 \neq \frac{2}{5}$ で $\operatorname{rank}(B, C) = 3$ $\operatorname{rank} B \neq \operatorname{rank}(B, C)$ で解は存在しない。

(iii) $c_2 = \frac{2}{5}$ で $\mathrm{rank}(B, C) = 2$, $\mathrm{rank}\, B = \mathrm{rank}(B, C)$ で解は存在し

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & & \\
1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & 2 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
A+①				
A+②	×	×	×	×
A+③	×	×	×	$r = 5.56 \times 10^{-2}$
A+④	×	×	×	$r = 5.56 \times 10^{-2}$
A+⑤	×	×	×	×
A+⑥	×	×	×	×
A+⑦	$r = 9.65 \times 10^{-2}$	$r = 23.2 \times 10^{-2}$	$r = 25.4 \times 10^{-2}$	×

但し ($|E| < r M L^4$)

数値実験

例1

$$\begin{cases} y' = -y, & y(0)=1, \quad y(x)=e^{-x} \\ z' = -50z, & z(0)=1, \quad z(x)=e^{-50x} \end{cases}$$

絶対誤差(Y)， $h = 1/25$

x		R・H	Case 1 ①	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
0.3125	y	3.01 E−10	2.41 E−14	7.91 E−10	4.52E−10	7.91 E−10	9.04 E−10
	z	1.95 E−6	1.95 E−6	1.95 E−10	1.95 E−10	1.95 E−10	1.95 E−10
2.5	y	1.94 E−9	1.55 E−13	5.08E−9	2.91 E−9	5.09 E−9	5.81 E−9
	z	0	0	3.77 E−39	0	0	0

例2

$$y' = \frac{y}{4}\left(1-\frac{y}{20}\right), \quad y(0)=1 \quad y(x)=\frac{20}{1+19e^{-\frac{x}{4}}}$$

絶対誤差(Y)， $h = 1/25$

x		R.H	Case 1 ①	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
0.3125	y	7.86 E−10	2.10 E−12	2.07 E−9	1.18 E−9	2.07 E−9	2.36 E−9
2.5	y	1.01 E−8	2.54 E−11	2.65E−8	1.52 E−8	2.64 E−8	3.02 E−8